21.01.16

Τοπικά και ολικά ακρότατα

Έχουμε τα πορίσματα:

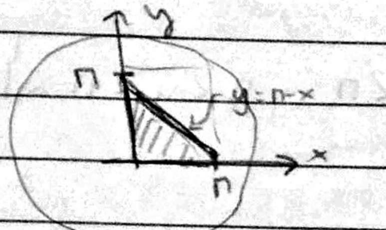
(a) $f: U \to \mathbb{R}$ συνεχής, $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Rightarrow \exists$ μέγιστο και ελάχιστο της f

(b) f μερικώς διαφορίσιμη και U ανοικτό.
Τότε: f έχει στο $\bar{x} \in U$ ακρότατο $\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$

(c) $f \in C^2(U)$, U ανοικτό και $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$
Τότε: $H_f(\bar{x})$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow \bar{x}$ γν. τοπικό ελάχιστο
" αρνητικά " $\Rightarrow$ " " " μέγιστο
" μη-ορισμένος $\Rightarrow$ δεν έχει στο $\bar{x}$ ακρότατο

Άσκηση 81 (από σημειώσεις): Προσδιορίστε τη θέση, το είδος και το μέγεθος των τοπικών και ολικών ακροτάτων της $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$
$0 \le x, y,\ x+y \le \pi$

Λύση



$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi - x\}$$

$$x, y \in [0,\pi] \Rightarrow x^2 + y^2 \le 2\pi^2$$
$$\Leftrightarrow \|(x,y)\| \le \sqrt{2}\pi$$

$\Rightarrow U$ φραγμένο

· U κλειστό: $(x_\nu, y_\nu) \in U$
$(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Θέλω ν.δ.ο. $(x_0, y_0) \in U$

Έχω $x_\nu \to x_0 \wedge y_\nu \to y_0$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_\nu \in [0,\pi] \\ x_\nu \to x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \in [0,\pi] \\ \text{και } 0 \le \underbrace{y_\nu}_{y_0} \le \underbrace{\pi - x_\nu}_{\pi - x_0} \Rightarrow 0 \le y_0 \le \pi - x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_0, y_0) \in U$$

($x_\nu \to x_0$)

$U\subset\mathbb{R}^2$ συμπαγές, η επέκταση της f σε όλο το $\mathbb{R}^2$ είναι άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμη

δηλ. χρησιμοποιήσαμε το (α)

$\Rightarrow f: U \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\Rightarrow \exists$ ολικό μέγιστο και ελάχιστο

$\cos(\alpha+\beta) =$

$\sin(\alpha+\beta) =$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha =$

Για να δούμε τι γίνεται στο $\text{int}U$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin y \sin(2x+y) \\ \sin x \sin(2y+x) \end{pmatrix} = (0,0)$$

το (β)

H/W: τις πράξεις

Αφού $\text{int}U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<\pi,\ 0<y<\pi-x\}$, έχουμε $\sin x$, $\sin y \in (0,1]$ για $(x,y)\in \text{int}U$.

Άρα,

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \sin(2x+y) = \sin(2y+x) = 0 \xrightarrow{2x+y,\ 2y+x \in (0,2\pi)} 2x+y = 2y+x = \pi$$

$\Rightarrow$ το μοναδικό κρίσιμο στο $\text{int}U$ είναι το $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sin y \cos(2x+y) & \sin(2(x+y)) \\ \sin(2(x+y)) & 2\sin x \cos(2y+x) \end{pmatrix}$$

ίσα

συμμετρικό

H/W: πράξεις

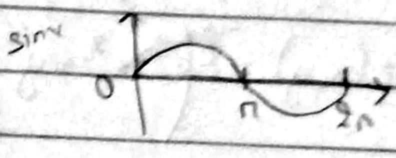
$$\Rightarrow Hf\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2\sin\frac{\pi}{3} & \sin\frac{4\pi}{3} \\ \sin\frac{4\pi}{3} & -2\sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

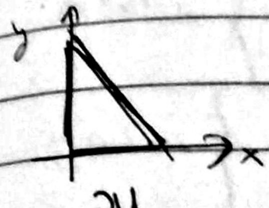
$\Rightarrow$ Ο πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος

$\Rightarrow$ Στο $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ έχω γν. τοπικό μέγιστο — το (γ)

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Πρέπει να δω τι γίνεται στο σύνορο, αφού για το ακρότατο δεν ξέρω καν αν είναι ολικό.





Στο ∂U:

$\forall$ $x=0$: $f(0,y)=0$

$\forall$ $y=0$: $f(x,0)=0$

$\forall$ $x+y=\pi$: $f(x,y)=0$

Άρα, για $(x,y)\in\partial U$: $f(x,y)=0$

Επίσης, έχουμε: $f(U)\subset[0,1]$ και $f(mU)\subset(0,1)$ άρα μέγιστο στο τριγωνάκι δεν γίνεται μηδέν

<u>Άσκηση</u>: Βρείτε (αν υπάρχουν) τα τοπικά και ολικά ακρότατα της

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{2}-1\right),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

<u>Λύση</u>

$f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

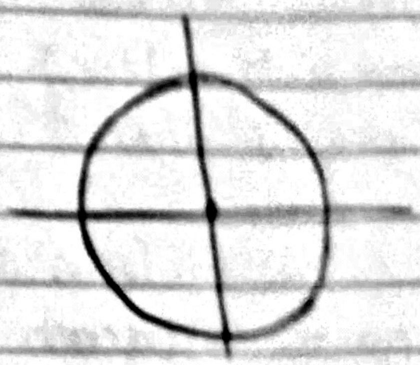
Υποψήφια σημεία ακροτάτων:

$$\nabla f(x,y) = \left(x\left(\frac{x^2+y^2}{2}-1\right)+\frac{x^2+y^2}{2}x,\ y\left(\frac{x^2+y^2}{2}-1\right)+\frac{x^2+y^2}{2}y\right)$$

$$= (x^2+y^2-1)(x,y)$$

$$= (0,0)$$

$\Rightarrow x^2+y^2=1$ ή $(x,y)=(0,0)$



$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} x^2+y^2-1+2x^2 & 2y \\ 2y & x^2+y^2-1+2y^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(0,0)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f(0,0)=0$ τοπικό μέγιστο

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$\phi(r)=\frac{r^2}{2}\left(\frac{r^2}{2}-1\right)$ όπου $r=\|(x,y)\|$

$$\phi'(r)=r\left(\frac{r^2}{2}-1\right)+\frac{r^2}{2}r=r(r^2-1)$$

$\phi'(r)=0 \Rightarrow r=0$ ή $r^2-1=0$

$\Rightarrow r=\pm 1$

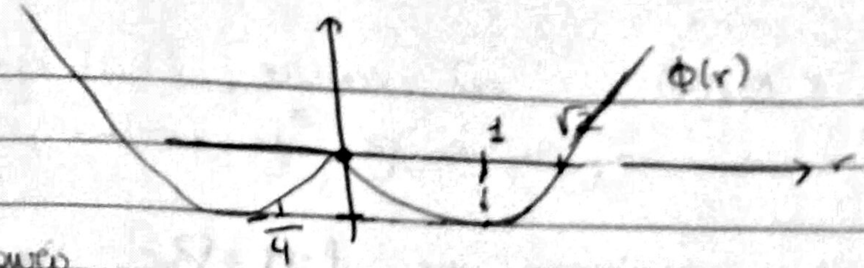
$\xRightarrow{r\geq 0}$ $\underbrace{r=0}_{\text{το είδαμε πριν}}$ ή $r=1$ άρα θα τσεκάρω αυτό

$$\phi''(r)=r^2-1+2r^2=3r^2-1$$

$$\phi''(1)=2>0$$

Άρα, $r=1$: ϕ τοπικό ελάχιστο

Για τον Φ:



υπάρχει κι 'αυτό

αφού η συνάρτηση είναι

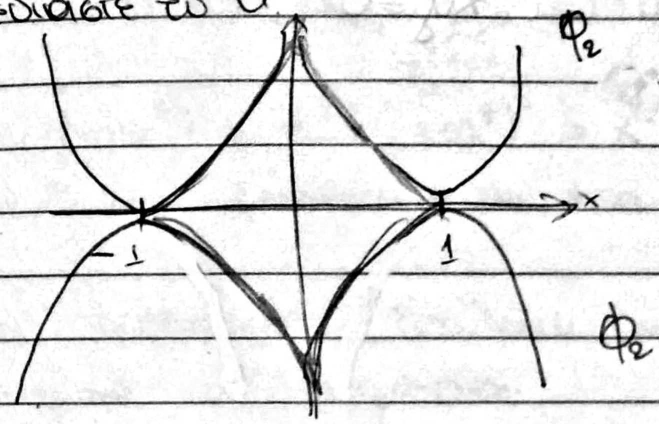
άρτια.

Άσκηση: $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], \ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$

$$\phi_1(x) = \begin{cases} -(x+1)^2, & x \in [-1,0] \\ (x-1)^2, & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \in [-1,0] \\ (x-1)^2, & x \in [0,1] \end{cases}$$

(α) Σχεδιάστε το U.



(β) Δείξτε ότι το U είναι συμπαγές

Λύση

Το U είναι φραγμένο, αφού $U \subset [-1,1] \times [-1,1]$

Το U είναι κλειστό, αφού $\phi_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς,
$\phi_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$

και αν $\underbrace{(x_\nu, y_\nu)}_{\in U} \to (x_0, y_0) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underbrace{x_\nu}_{\in[-1,1]} \to \underbrace{x_0}_{\in[-1,1]} \ \wedge \ y_\nu \to y_0$

και αφού ϕ_1, ϕ_2 συνεχείς: $\phi_1(x_\nu) \le y_\nu \le \phi_2(x_\nu) \Longrightarrow$

$\phi_1(x_\nu) \to \phi_1(x_0)$, $y_\nu \to y_0$, $\phi_2(x_\nu) \to \phi_2(x_0)$

$\Rightarrow \varphi_1(x_0) \leq y_0 \leq \varphi_2(x_0)$

$\Rightarrow$ ο.ε.δ.

(γ) Τοπικά και ολικά ακρότατα της $f: U \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y^3$

(δ) Γιατί είμαστε σίγουροι ότι η f έχει ολικό μέγιστο και ελάχιστο.

<u>Λύση</u>

(δ) Επειδή η f είναι συνεχής και το U (σύμφωνα με το (β)) είναι συμπαγές

(γ) Αρχικά μελετάμε την επέκταση της f

$\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$ $\forall (x,y) \in U$

$$\nabla \tilde{f}(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2) = (0,0)$$
$$= xy(2y^2, 3xy)$$
$$= (0,0)$$

$\Rightarrow xy = 0$

$\Rightarrow x = 0 \lor y = 0$

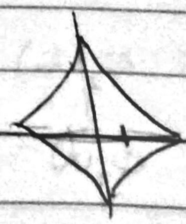
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy \\ 6xy & 6x^2y \end{pmatrix}$$ δεν βγάζουμε τίποτα για $xy=0$

$\Downarrow$

άρα ακρότατα θα έχει στο "σύνορο"

Άρα, $f(x,0) = f(0,y) = 0$

Επίσης για σταθερό $x \in [-1,1]$, η $f(x,y) = x^2y^3$ δεν έχει ακρότατο στο $y=0$



Για σταθερό $y \in (0,1]$, επίσης δεν έχει ακρότατο, αφού y^3 γν. αύξουσα.

αντίστοιχα και για τα αρνητικά y

φαντάζομαι κάπως έτσι μοιάζει

⇓

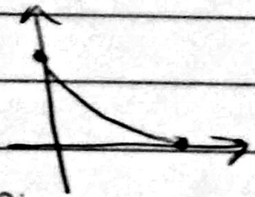
τελικά όμως ούτε εκεί ⇐ Μπορεί να το ανέφερε μέσω της μονοτονίας.

→ Άρα, από την προηγούμενη ανάλυση, βλέπουμε ότι στο intU δεν υπάρχουν ακρότατα.

Μένει να δούμε τι συμβαίνει στο σύνορο.
έχει τέσσερα κομμάτια

π.χ. στο πρώτο τεταρτημόριο, θεωρούμε την

$$f(x, \underbrace{(x-1)^2}_{=\phi_2(x) = y}), \quad x \in [0,1]$$



$$f(x,(x-1)^2) = x^2((x-1)^2)^3 = x^2(x-1)^6, \quad x \in [0,1]$$

άρα θα μελετήσω αν έχει αυτή ακρότατα

Λόγω συμμετρίας, δουλεύω αντίστοιχα και στα υπόλοιπα τεταρτημόρια.

H/W: αναλυτικά η μελέτη

⇒ Η συνάρτηση αυτή έχει ελάχιστο $= \frac{1}{2}$ και μέγιστο $= 1$.

SOS! Συνέχεια, Διαφορισιμότητα, Ακρότατα